



بخش آموزش رسانه تفریحی سنتر

کلیک کنید  www.tafrihicenter.ir/edu

 نمونه سوال  گام به گام

 امتحان نهایی  جزوه

 دانلود آزمون های آزمایشی

متوسطه اول : هفتم ... هشتم ... نهم

متوسطه دوم : دهم ... یازدهم ... دوازدهم

www.tafrihicenter.ir



حد تابع



یادآوری ۱- حد توابع جبری به صورت $\frac{0}{0}$ و رفع ابهام آن

هر گاه در محاسبه حد به حالتی رسیدید که هم صورت و هم مخرج صفر شده بود این حالت را مبهم نامیده و سعی می کنیم این حالت را رفع کنیم. برای این کار باید عاملی که باعث صفر شدن صورت و مخرج شده است را پیدا کرده و آن را از صورت و مخرج حذف کنیم. در بیشتر مواقع وقتی $X \rightarrow a$ عبارت $X - a$ را عامل صفر کننده ی صورت و مخرج میدانیم.

پس باید سعی کنیم $X - a$ را از صورت و مخرج بیرون بکشیم. در چند جمله ای ها این کار را با تقسیم بر $X - a$ انجام میدهیم.

📖 مثال: حدهای خواسته شده زیر را بیابید.

الف) $\lim_{x \rightarrow 1} \frac{x^2 + 2x - 3}{1 - x^2}$

ب) $\lim_{x \rightarrow 2} \frac{x^2 - 4}{x^2 + x - 6}$

پ) $\lim_{x \rightarrow 1} \frac{x^2 + x - 2}{3 - 4x + x^2}$

ت) $\lim_{x \rightarrow 2} \frac{3x^2 - 5x - 2}{2x^2 - 3x - 2}$





یادآوری ۲ - حد توابع رادیکالی به صورت $\frac{0}{0}$ و رفع ابهام آن



در توابع رادیکالی برای از بین بردن رادیکال که بتوانیم $X - a$ را بیرون بیاوریم باید به فرجه دقت کنیم. اگر فرجه زوج باشد اتحاد مزدوج و اگر با فرجه ۳ مواجه بودید از اتحاد چاق و لاغر کمک بگیرید تا عامل $X - a$ بیرون بیاید.

مثال: حدهای خواسته شده را بیابید.

الف) $\lim_{x \rightarrow 1} \frac{2 - \sqrt{x}}{x^2 - 16}$

ب) $\lim_{x \rightarrow 6} \frac{3 - \sqrt{x+3}}{x-6}$

پ) $\lim_{x \rightarrow \frac{3}{2}} \frac{2x^2 - x - 3}{4x^2 - 4x - 3}$

ت) $\lim_{x \rightarrow 1} \frac{\sqrt{x} - x}{1 - x}$





ث) $\lim_{x \rightarrow 1} \frac{1 - \sqrt{x}}{2 - \sqrt{5 - x}}$

ج) $\lim_{x \rightarrow \frac{1}{4}} \frac{2x + \sqrt{x} - 1}{4x - 1}$

چ) $\lim_{x \rightarrow 1} \frac{x - 4\sqrt{x} + 3}{1 - x^2}$

$\lim_{x \rightarrow 1} \frac{x - \sqrt{x}}{(x - 1)(x + 2)}$

مثال: حد تابع زیر را در صورت وجود بیابید. خرداد ۹۸ تجربی

$\lim_{x \rightarrow 2} \frac{x^2 - 9}{2 - \sqrt{x + 1}}$

مثال: حد تابع روبرو را در صورت وجود بیابید. تیر ۹۸ تجربی





$$\lim_{x \rightarrow 3} \frac{x^2 - 2x - 3}{x - \sqrt{x+6}}$$

مثال: حد توابع زیر را در صورت وجود بیابید.

حد نامتناهی



فرض کنید تابع f در یک همسایگی راست نقطه a تعریف شده باشد. مفهوم $\lim_{x \rightarrow a^+} f(x) = +\infty$ این است که مقدار تابع

f میتواند از هر عدد مثبتی بیشتر شود هر گاه x بتواند از سمت راست به مقدار دلخواه به a نزدیک شود.

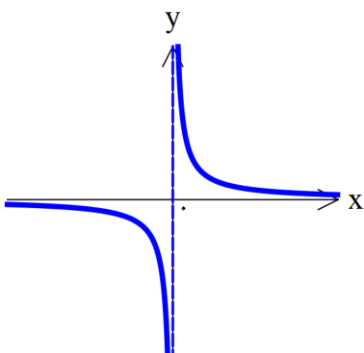
و مفهوم این است که $\lim_{x \rightarrow a^+} f(x) = -\infty$ این است که مقدار تابع میتواند از هر عدد منفی کمتر شود هر گاه x بتواند از

سمت چپ به مقدار دلخواه a به نزدیک شود.

در شکل زیر میخواهیم حد تابع را اطراف $x = 0$ بررسی کنیم:

یعنی باید بررسی کنیم وقتی از سمت راست به $x = 0$ نزدیک میشویم چه اتفاقی برای $f(x)$ میفتد و وقتی از سمت چپ

به $x = 0$ نزدیک میشویم چه اتفاقی برای $f(x)$ میفتد.

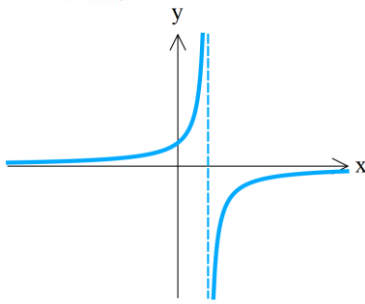


$$\lim_{x \rightarrow 0^-} \frac{1}{x} = -\infty \quad \text{و} \quad \lim_{x \rightarrow 0^+} \frac{1}{x} = +\infty$$

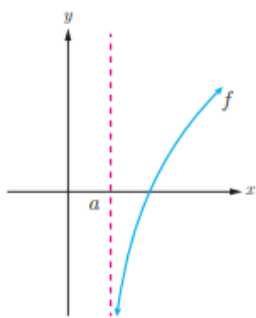




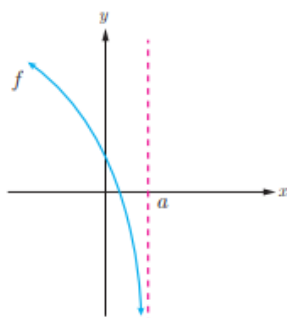
مثال: در شکل زیر تابع f رسم شده است. $\lim_{x \rightarrow 1^+} f(x)$ را بیابید.



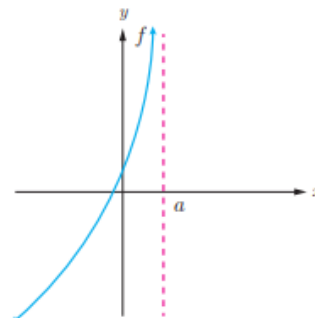
مثال: در شکل های زیر حاصل حدهای خواسته شده را بنویسید.



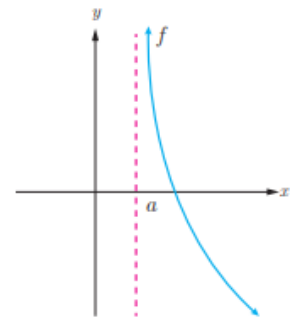
$$\lim_{x \rightarrow a^+} f(x) =$$



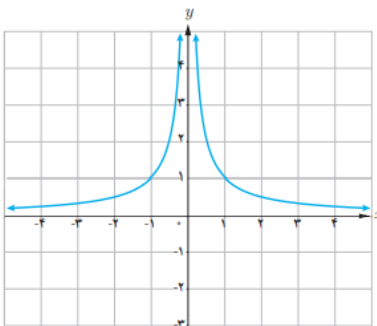
$$\lim_{x \rightarrow a^-} f(x) =$$



$$\lim_{x \rightarrow a^-} f(x) =$$



$$\lim_{x \rightarrow a^+} f(x) =$$



مثال: نمودار تابع $f(x) = \frac{1}{|x|}$ به صورت روبرو است. حاصل

$$\lim_{x \rightarrow \infty} f(x) \text{ ؟}$$

مثال: نمودار تابع را $f(x) = \log_{x+1}$ رسم کنید و از روی شکل حاصل حد $\lim_{x \rightarrow (-1)^+} f(x)$ را محاسبه کنید.





قضایای حدهای نامتناهی



$$(۱) \text{ اگر } n \text{ عددی طبیعی باشد آنگاه : } \lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{1}{x^n} = 0 \text{ و } \lim_{x \rightarrow -\infty} \frac{1}{x^n} = \begin{cases} +\infty & n = \text{ج} \\ -\infty & n \neq \text{ج} \end{cases}$$

$$(۲) \text{ اگر } \lim_{x \rightarrow a} f(x) = L \neq 0 \text{ و } \lim_{x \rightarrow a} g(x) = 0 \text{ آنگاه تابع } y = \frac{f(x)}{g(x)} \text{ در نقطه } a \text{ حد نامتناهی (بینهایت) دارد و}$$

علامت بی نهایت را با توجه به علامت L و علامت مقادیر تابع مخرج در همسایگی محذوف مورد نظر تعیین می کنیم.

📖 مثال: حد توابع زیر را محاسبه کنید.

الف) $\lim_{x \rightarrow 2^+} \frac{x+2}{2-x}$

ب) $\lim_{x \rightarrow 1^+} \frac{2x}{1-x^2}$

پ) $\lim_{x \rightarrow 1^+} \frac{x^2-1}{(x-1)^2}$

شهریور ۹۸

ت) $\lim_{x \rightarrow -2} \frac{x+1}{(x+3)^2}$

ث) $\lim_{x \rightarrow 2} \frac{3x+1}{|x-2|}$

ج) $\lim_{x \rightarrow -2^-} \frac{[x]-3}{x+2}$

چ) $\lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{x^2+x}{x^2}$

خرداد ۹۹





نکته: در توابعی که مثلثاتی هستند حتماً باید دقت کنید که تابع مثلثاتی داده شده در کدام ربع مثلثاتی قرار دارد و علامت مخرج را از روی ربع دایره مشخص کنید.



مثال: حد توابع زیر را محاسبه کنید.

الف) $\lim_{x \rightarrow \frac{\pi}{2}^+} \tan x$

ب) $\lim_{x \rightarrow \frac{\pi}{2}^-} \tan x$

پ) $\lim_{x \rightarrow 0^+} \cot x$

ت) $\lim_{x \rightarrow 0^-} \cot x$

ث) $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{1}{1 - \cos x}$

شهریور ۹۸ تجربی

$$\lim_{x \rightarrow 3^-} \frac{[x] - 3}{x - 3}$$

مثال: حد تابع زیر را بدست آورید.

$$\lim_{x \rightarrow 0^-} \frac{[x]}{\sin x}$$

مثال: حد تابع زیر را در صورت وجود به دست آورید.





حد در بینهایت



هنگامی که $X \rightarrow +\infty$ یا $X \rightarrow -\infty$ حد مورد نظر را حد در بینهایت میگوییم.

♦ منظور از $\lim_{x \rightarrow +\infty} f(x) = L$ آن است که مقدار تابع در بازه ای مثل $(a, +\infty)$ تعریف شده است و $f(x)$ را میتوان به

هر مقدار دلخواه به L نزدیک کرد مشروط براینکه X بزرگ شود. (یعنی X به سمت مثبت ∞ میل کند)

♦ منظور از $\lim_{x \rightarrow -\infty} f(x) = L$ آن است که مقدار تابع در بازه ای مثل $(-\infty, b)$ تعریف شده است و $f(x)$ را میتوان به

هر مقدار دلخواه به L نزدیک کرد مشروط براینکه X به اندازه کافی کوچک شود. (یعنی X به سمت منفی ∞ میل کند)

در این نوع حدها میخواهیم رفتار تابع را در ∞ بررسی کنیم.

اگر عبارت داده شده چند جمله ای باشد، فقط جمله ای که بیشترین توان را دارد در اولویت قرار میدهم.

به طور مثال: $\lim_{x \rightarrow +\infty} (2x - 1) = \lim_{x \rightarrow +\infty} 2x = +\infty$ یا $\lim_{x \rightarrow +\infty} (-5x + 3) = \lim_{x \rightarrow +\infty} -5x = -\infty$

📖 مثال: حدود زیر را محاسبه کنید.

الف) $\lim_{x \rightarrow +\infty} \left(7 - \frac{3}{x^2} \right)$

ب) $\lim_{x \rightarrow -\infty} \frac{15x - 9}{12x + 2}$

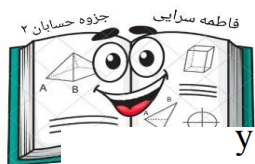
📖 مثال: حد تابع $f(x) = \frac{-3x^7 + 5x^2}{2x^3 + 9}$ وقتی $x \rightarrow -\infty$ میل میکند برابر میباشد. شهریور ۹۸

📖 مثال: جای خالی را کامل کنید. دی ۹۷

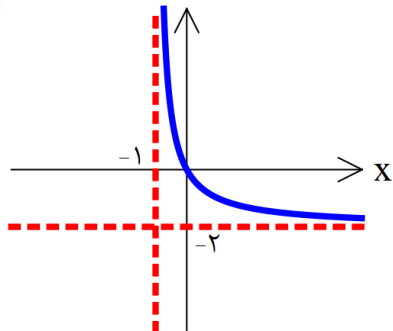
$$f(x) = \begin{cases} \frac{1}{x} & x > 0 \\ \frac{5x^2 - 3x}{-x^2 + 1} & x \leq 0 \end{cases}$$

حد تابع وقتی $x \rightarrow -\infty$ برابر است.





مثال: با استفاده از نمودار تابع $y = f(x)$ ، حدهای خواسته شده را بنویسید.



الف) $\lim_{x \rightarrow +\infty} f(x)$ ب) $\lim_{x \rightarrow (-1)^+} f(x)$

خرداد ۹۸ تجربی

مثال: تابعی مثال بنزید که حد آن در $+\infty$ برابر 10^- باشد.

مثال: تابعی مثال بنزید که حد آن در $-\infty$ برابر 2 باشد.

$$\lim_{x \rightarrow -\infty} \frac{2x + \sqrt{x^2 + 3}}{5x - 4}$$

مثال: حد تابع های روبرو را محاسبه کنید.

$$\lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{5x^3 + 4x - 1}{1 - x^2}$$

$$\lim_{x \rightarrow \pm\infty} \frac{2x^3 - x + 1}{4x^3 + 2x - 1}$$

خرداد ۹۹





$$\lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{4x^5 + 3x^2 + 1}{-3x^5 + 3x^2 + 3}$$

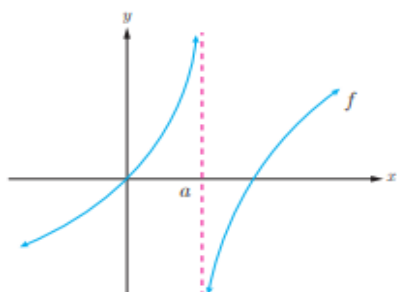
مثال: حد تابع روبرو را بیابید. دی ۹۷

مجانب قائم:



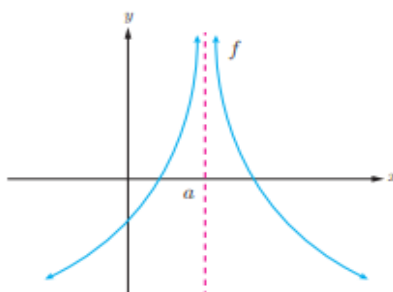
خط $x = a$ را مجانب قائم منحنی تابع $y = f(x)$ گوئیم هرگاه: $\lim_{x \rightarrow a} f(x) = \infty$ یعنی هرکدام از حالت‌های زیر اتفاق

بیفتد خط $x = a$ را مجانب قائم گوئیم.



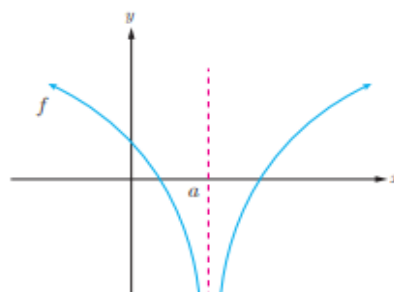
$$\lim_{x \rightarrow a^-} f(x) = -\infty$$

$$\lim_{x \rightarrow a^+} f(x) = +\infty$$



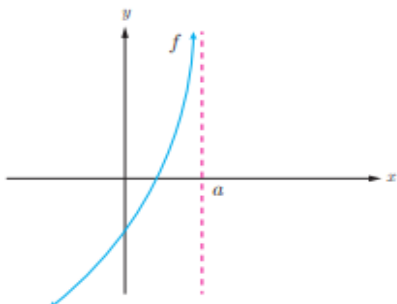
$$\lim_{x \rightarrow a^+} f(x) = +\infty$$

$$\lim_{x \rightarrow a^-} f(x) = +\infty$$

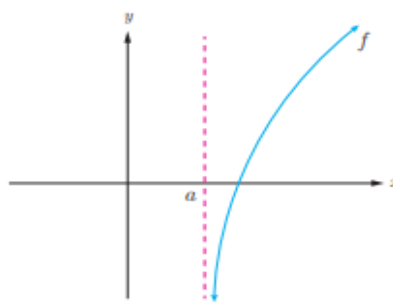


$$\lim_{x \rightarrow a^+} f(x) = -\infty$$

$$\lim_{x \rightarrow a^-} f(x) = -\infty$$



$$\lim_{x \rightarrow a^-} f(x) = +\infty$$



$$\lim_{x \rightarrow a^+} f(x) = -\infty$$

نکته: برای یافتن مجانب قائم توابع کسری باید ریشه‌های مخرج را بیابیم و حد تابع وقتی (ریشه مخرج $\rightarrow X$)

را محاسبه کنیم. اگر جواب ∞ شد یعنی آن ریشه مخرج مجانب بوده است.





نکته: همواره حواستان به دامنه تابع باشد که محدود نباشد و به زبانی بهتر دقت کنید X اصلا

میتواند به سمت ∞ میل کند یا خیر. مثلاً در تابع $\frac{\sqrt{1-x^2}}{x^2-3x-4}$ اصلاً نیازی به کار خاصی نیست و میگوییم تابع مجانب

قائم ندارد زیرا دامنه تابع محدود است.

مجانب افقی:



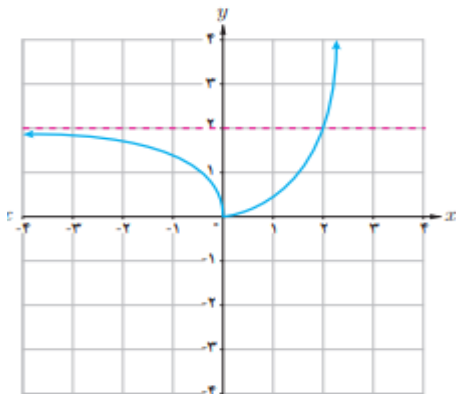
خط $y = b$ را مجانب افقی منحنی تابع $y = f(x)$ میگوییم هرگاه $\lim_{x \rightarrow \infty} f(x) = b$

پس برای یافتن مجانب افقی حد تابع را وقتی $x \rightarrow \infty$ می یابیم اگر جواب یک عدد شد آن عدد مجانب افقی است.

نکته: ممکن است در تابعی فقط وقتی $x \rightarrow +\infty$ یا وقتی $x \rightarrow -\infty$ جواب عدد شود. یعنی در یک سمت



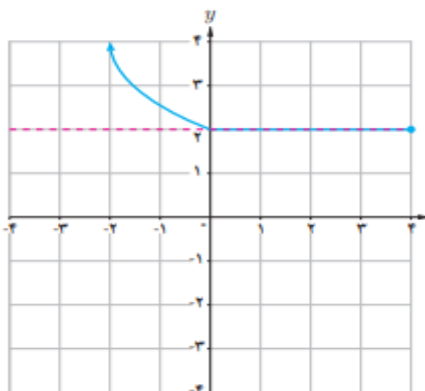
منحنی فقط مجانب افقی داشته باشیم. مثل شکل زیر که سمت $-\infty$ مجانب افقی داریم.



نکته: ممکن است تابعی به صورت تابع ثابت به سمت $+\infty$ یا $-\infty$ برود. در این صورت آن خط ثابت مجانب



افقی تابع است. مثل:

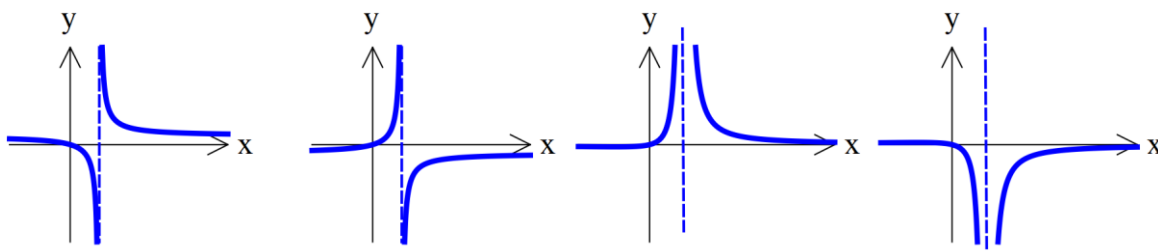




مثال: مجانب های قائم و افقی بیابید. $f(x) = \frac{3x}{x^2 - 1}$ دی ۹۷

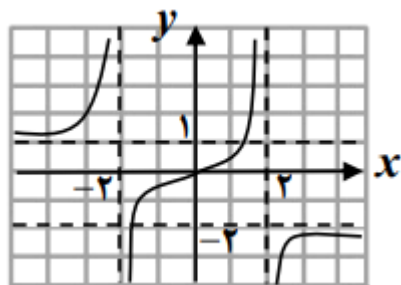
مثال: مجانب های تابع $f(x) = \frac{x^2 - x}{|x| - 1}$ را بیابید.

مثال: کدام شکل وضعیت تابع $f(x) = \frac{x}{x^2 - 2x + 1}$ را در همسایگی $x = 1$ درست نشان میدهد؟



مثال: کدام یک از خطوط $x = -1$ و $x = 3$ مجانب قائم $f(x) = \frac{x^2 - 4x + 3}{x^2 - 2x - 3}$ هستند؟ دلیل؟ خرداد ۹۸





مثال: با توجه به شکل مجانب های افقی تابع را بنویسید. خرداد ۹۸

مثال: مجانب قائم و افقی تابع $y = \frac{x+3}{2-x}$ را بیابید. شهریور ۹۸

مثال: نمودار تابع f را به گونه ای رسم کنید که همه شرایط زیر را دارا باشد. خرداد ۹۹

الف) $f(1) = f(-2) = 0$

ب) $\lim_{x \rightarrow 2^+} f(x) = +\infty$, $\lim_{x \rightarrow 2^-} f(x) = -\infty$

پ) خط $y = -1$ مجانب افقی آن باشد.

